Problemas Capítulo 5
Oscilações

Problemas Teóricos

1. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e ϕ são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule A e ϕ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

2. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\sin(\,\omega\,t + \varphi)$, com $\omega = \sqrt{k/m}$, é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e φ são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule A e φ , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

3. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\,sen\,(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que C e D são constantes. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule C e D , no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

c) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo.

4. Um objeto de 500 g, preso a uma mola com k = 8 N/m, oscila num movimento com amplitude A =10 cm. Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.

b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.

c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.

5. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$N/m e $m = 1$ kg. Considerando a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$ calcule A e ϕ, sabendo:

a) que a velocidade inicial é nula e a posição inicial é 4 m.

b) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 4 m.

c) que a velocidade inicial é 2 m/s e a posição inicial é 4 m.

d) que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial é 0 m.

6. Um pêndulo obedece a equação $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$, para ângulos θ pequenos. Considere $L = 1$ m.

a) Mostre que a lei do movimento $\theta(t) = A\cos(\,\omega\,t + \varphi)$, com $\omega = \sqrt{g/L}$, é solução da equação do pêndulo, em que A e φ são constantes. Qual é a lei de velocidade angular?

b) Calcule A e φ , no caso em que a velocidade angular inicial é -0.1rad / s e o ângulo inicial 0.4 rad.

7. Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola (k = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento (b = 2 kg/s). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1$ s) seguinte.

8. Um oscilador amortecido consiste de uma massa de m=2 kg afixada a uma mola de constante k, e movendo num fluído viscoso. Se o coeficiente de amortecimento for b = 1 kg/s, qual deve ser o valor de k para quer o oscilador seja criticamente amortecido?

9. O movimento de um oscilador amortecido obedece a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega_0^2\,x - 2c\frac{dx}{dt}$$

onde $c = b/2m$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Mostre que $x(t) = Ae^{-\,ct}\cos(\omega\, t\,)$ é uma solução deste equação se ω tome um determinado valor. Qual é este valor?

TESTE 3 a partir daqui

10. Um corpo de massa 0.5kg move-se num oscilador harmónico forçado. O oscilador exerce no corpo a força

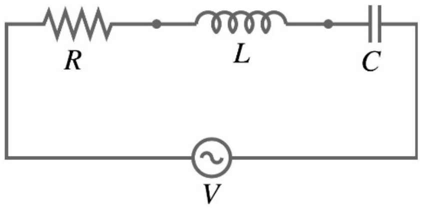
$$F_x = -k\,x$$

Com k = 2N/m. O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0\cos\big(\omega_f t\big)$. Considere que $b = 0.02$kg/s e $F_0 = 1$N.

Calcule a amplitude das oscilações no regime estável quando $\omega_f = 1$rad/s, $\omega_f = 2$rad/s; e $\omega_f = 4$rad/s.

Comente nos resultados.

11. Um circuito elétrico constituído por uma bobina, uma resistência e um condensador em série alimentado por uma fonte externa é um sistema onde os eletrões estão sujeitos a oscilações harmónicas amortecidas e forçadas. R é a resistência, L a indutância da bobine e C a capacidade do condensador. $V = V_0\sin(\omega t + \phi)$ é o potencial elétrico aplicado, que nas tomadas das nossa casas é caraterizado por $\omega = 2\pi \times 40$ Hz e $V_0 = \sqrt{2} \times 220$ V.



A carga elétrica $Q(t)$ neste circuito varia (oscila) de acordo com a equação diferencial de 2ª ordem

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Por comparação das parâmetros do sistema mecânico $\left(k,\ m\ , b, F_0 \text{ e } \omega_f\right)$ e do sistema elétrico $(L,\ R,\ C, V_0 \text{ e } \omega)$, encontre a expressão da frequência angular de ressonância para no circuito RLC em série. O oscilador mecânico Harmónico Forçado a equação diferencial é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\cos\left(\omega_f t\right).$$

12. Diga quais dos seguintes sistemas modelados pelas equações diferencias de valor incial podem apresentar soluções caóticas?

a) Oscilador Harmónico Amortecido

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

b) Oscilador Harmónico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos\left(\omega_f t\right)$$

c) Oscilador Quártico Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\alpha x^3 - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos\left(\omega_f t\right)$$

d) Oscilador de Lorenz

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \end{cases}$$

e) Oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)\ \frac{dx}{dt}$$

f) Pêndulo Amortecido e Forçado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

g) oscilador de uma palheta de clarinete

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \alpha\ \frac{dx}{dt} - \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

Soluções Problemas Teóricos

1. a) $v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sin\ (\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$ b) 4 m; 0; c) 8 J

2. a) $v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\ \cos(\ \omega\ t + \varphi)$ b) 4 m; $\frac{3}{2}\pi$; c) 8 J

3. a) $v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ b) C=4 m e $D = 0$; c) 8 J

4. a) 40 cm/s; 160 cm/s^2; b) ± 32 cm/s; -96 cm/s^2; c) 0.232 s

5. a) 4m, 0 rad; b) 4.472 m, 0.463 rad; c) 4.472 m, 5.820 rad; d) 2 m, $\frac{\pi}{2}$ rad

6. a) $\frac{d\theta}{dt} = -\omega A\sin(\ \omega\ t + \varphi)$; b) $\varphi = \tan^{-1}(0.1/0.4\omega)$ = 0.664 rad. A =0.508 rad.

7. a) $E_c = E_p = 0.25$ J; b) $t = \frac{\pi}{40}$ s; $x = 0.070710$ m; c) -0.4323 J

8. k = 0.125 kg/m.

9. $\omega = \sqrt{\ \omega_0^2 - c^2}$.

10. 0.67m, 25m e 1.07m. A amplitude é muito maior quando ω_f é próximo à frequência natural de oscilação do oscilador, ω_0 = 2rad/s, mostrando o fenómeno de ressonância.

11. $\sqrt{\frac{1}{LC}}$

12. a) Não b) Sim c) Sim d) Sim e) Não f) Sim g) Não.

Problemas Numéricos

13. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período, usando os resultados numéricos.

c) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

14. Na aproximação linear, a aceleração angular de um pêndulo é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

em que L é o comprimento do pêndulo e g a aceleração de gravidade. Considere g = 9.8 m/s^2 e L = 0.5m.

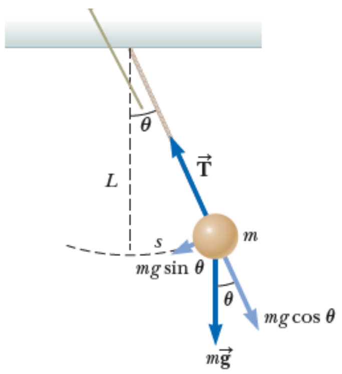
a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade angular inicial é 0.5 rad/s e a posição inicial 0.1 rad.

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período.

15. Uma massa suspensa do teto por um fio de comprimento $L = 1$ m oscila à volta da sua posição de equilíbrio expressa por $\theta = 0$ rad, de acordo com a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

θ é o ângulo que o fio faz com a vertical.



Calcule o período do movimento, com a precisão de 4 algarismos, quando for largado ($\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$) e o ângulo inicial for:

a) 5º b) 10º c) 20º d) 30º

16. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2 + \ \alpha\ x^3$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x - \ 3\,\alpha\ x^2$$

Considere $k = 1$ N/m e $\alpha = -\,0.01$ N/m^2.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 1 J?

b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 1.3 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

c) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 2.9 m e a velocidade inicial nula? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência do movimento?

17. Um corpo de massa 0.25 kg preso a uma mola (k = 1 N/m) fica sujeito a amortecimento (b = 0.1 kg/s).

$$F_x = -k\,x\ - bv_x$$

a) Calcule a lei do movimento, quando a massa comece em repouso em $x = 0.4$ m. Faça o gráfico da posição em função do tempo de 0 até 20 s.
b) Encontre os máximos e mínimos (locais) da posição usando a interpolação pelo polinómio de Lagrange.
c) Faça um plot do logaritmo das amplitudes obtidas em b), em função do tempo, e encontre um ajuste linear. Qual é a dependência entre a amplitude o tempo? Qual é o declive e o seu erro? Concorda com a teoria?

18. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial $E_p = \frac{1}{2} k\ x^2$

e exerce no corpo a força $F_x = -k\,x$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m. Tem confiança no seu resultado?

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.

d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.

e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

19. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador harmónico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador harmónico tem a energia potencial $E_p = \frac{1}{2} k\ x^2$

e exerce no corpo a força $F_x = -k\,x$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.16$ kg/s, e $F_0 = 2$ N e $\omega_f = 2.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Faça o gráfico da amplitude do movimento em função de ω_f, para valores de ω_f de 0.2 até 2 rad/s.

20. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2} k \ x^2 (1 + \ \alpha \ x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k \, x \, (1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos\left(\omega_f t\right)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = \ 0.002$ N/m^2, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é -4 m/s e a posição inicial -2 m.

d) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos calculados na alínea anterior.

e) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo?

21. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial $E_p = \frac{1}{2} k \ x^2 (1 + \ \alpha \ x^2)$

e exerce no corpo a força $F_x = -k \, x \, (1 + 2\alpha x^2)$.

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos\left(\omega_f t\right)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = \ 1.00$ N/m^2, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m. Tem confiança no seu resultado?

b) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase.

c) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial -3 m/s e a posição inicial -3 m.

d) Se existir regime estacionário, calcule os limites do movimento (amplitude), o seu período, faça o gráfico no espaço da fase e a análise de Fourier [veja Cap. 6].

e) Calcule a energia mecânica nos casos da alínea a) e b). É constante ao longo do tempo?

f) Face aos resultados obtidos como carateriza as soluções deste oscilador forçado?

22. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \alpha\ x^4$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -\,4\ \alpha\ x^3\ .$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0\cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = 0.25$ N/m², $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s. Este oscilador pode apresentar regime caótico. Calcule até que instante pode calcular univocamente a lei do movimento, sabendo que a posição inicial é 3.000 ± 0.001 m e a velocidade inicial é nula. Considere todas as quantidades, exceto a posição inicial, medidas com uma precisão elevada. .

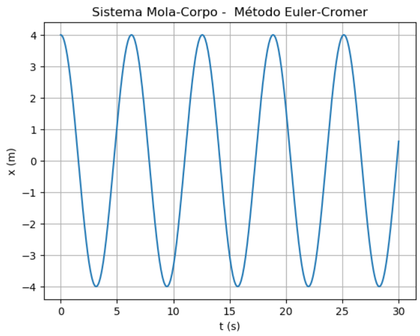
23. Ao modelar a dinâmica da convecção dum fluido por um modelo muito simples, Edward Lorenz, obteve três equações diferenciais de 1ª ordem de valor inicial,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ \quad x(t=0) = x_0 \\ \quad y(t=0) = y_0 \\ \quad z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

em que os coeficientes e as variáveis não têm um significado físico direto. Determine a evolução temporal, quando $\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28$ e $x(t=0) = z(t=0) = 0$ e $y(t=0) = 1$.

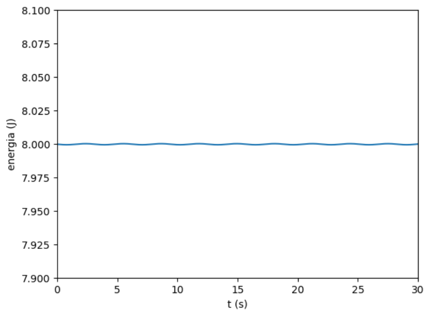
Soluções Problemas Numéricos

13. a)



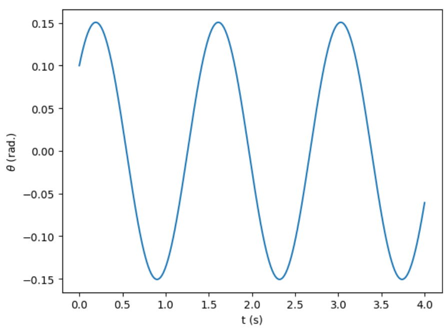
b) 4 m; 6.283 s;

c)



A energia mecânica é constante ao longo do tempo.

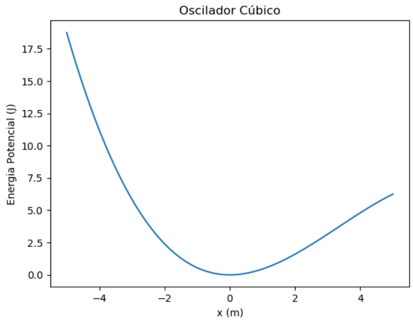
14. a)



b) A = 0.151 rad., T = 1.419 s.

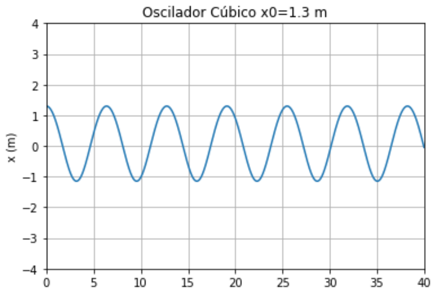
15. a) 2.008 s; b) 2.011 s; c) 2.022 s; d) 2.042 s

16. a)



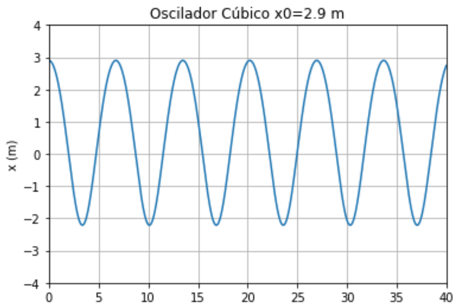
Movimento periódico.

b)



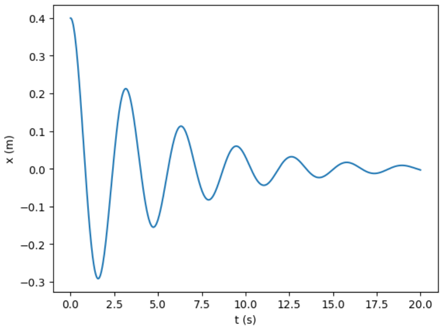
0.735 J; 1.30 m e -1.15 ,; 0.157 Hz;

c)

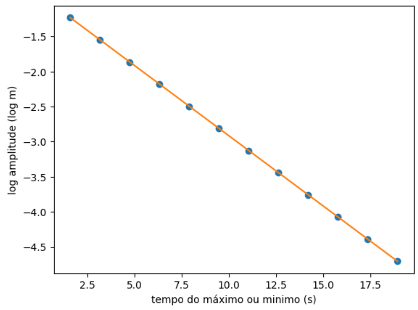


2.99 J; 2.90 m e -2.21 m; 0.149 Hz

17. a)



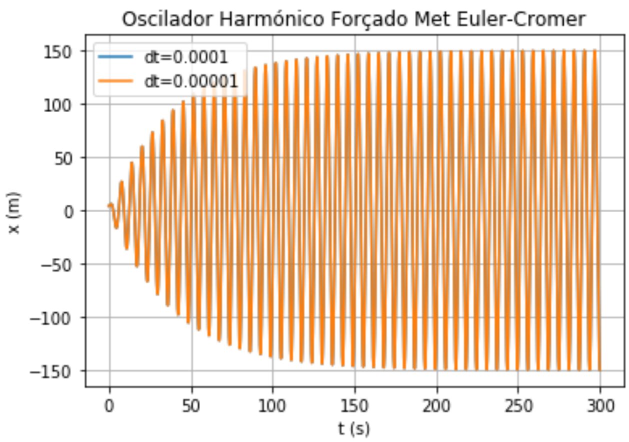
c)



Declive m= -0.200040010 +/- 3x10^{-9} s^{-1}

O valor esperado é -0.2 s^{-1}, apesar de não encaixar nos limites do erro, é razoável concluir que concorda com a teoria.

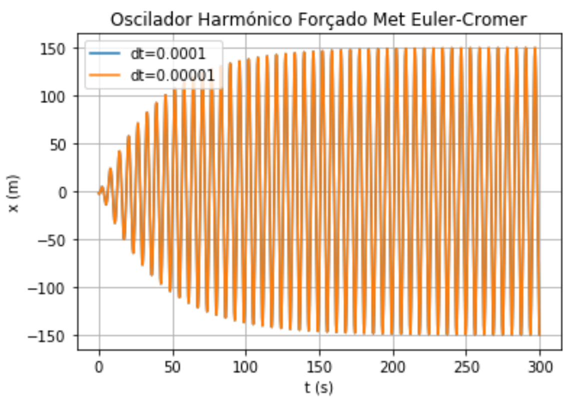
18. a)



Temos confiança, porque a lei do movimento obtida por dois passos temporais diferentes é a mesma. Como também os dois passo temporais produzem o mesmo resultado para o tempo final considerado $t = 300.0000$ s $x = -149.881$ m;

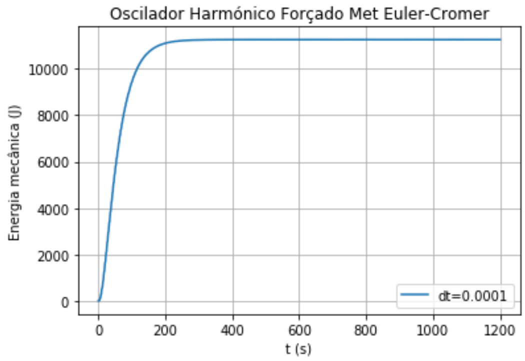
b) 150.00 m; 6.283 s

c)



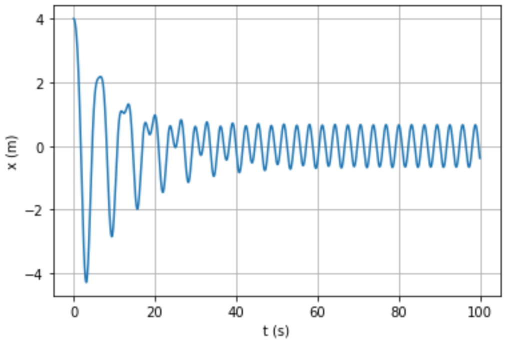
d) 150.00 m; 6.283 s;

e)



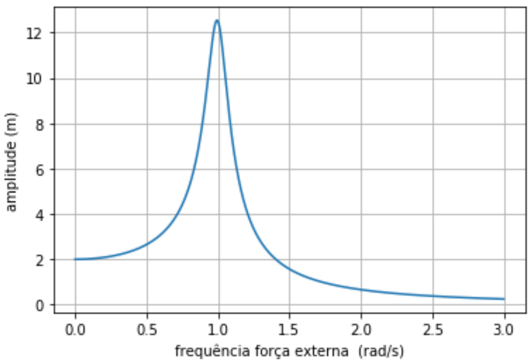
Não conserva a energia mecânica.

19. a)

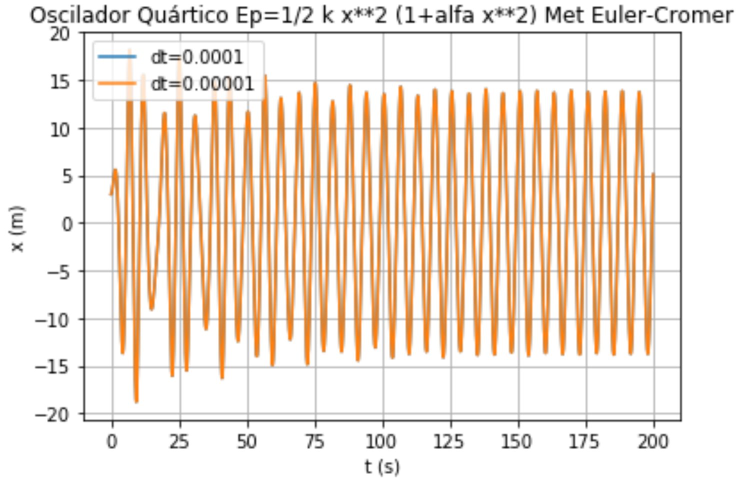


b) A = 0.6648 m.

c)



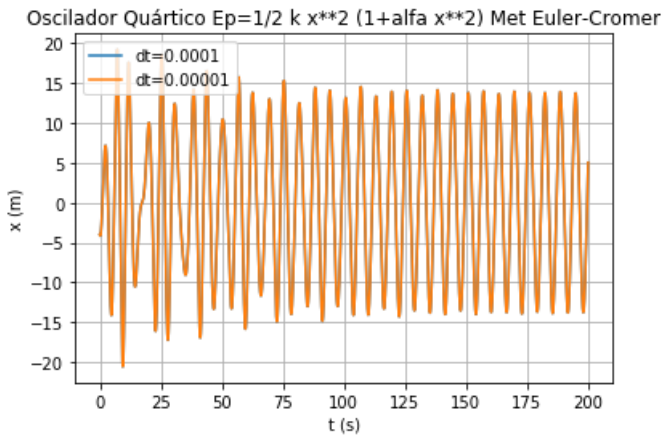
20. a)



Sim! Confiança porque a solução é idêntica para passos temporais diferentes.

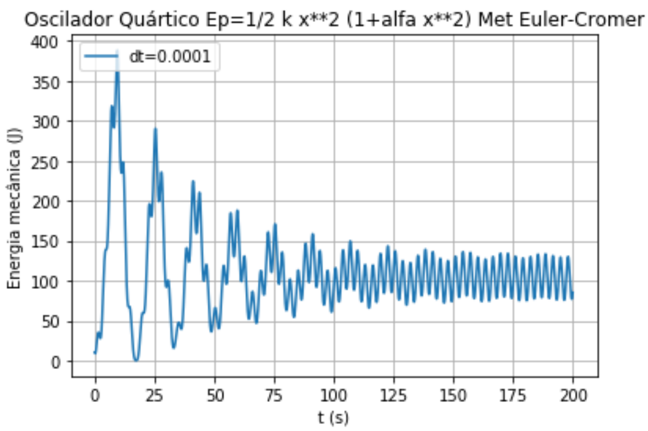
b) 13.791 m; 6.283 s

c)



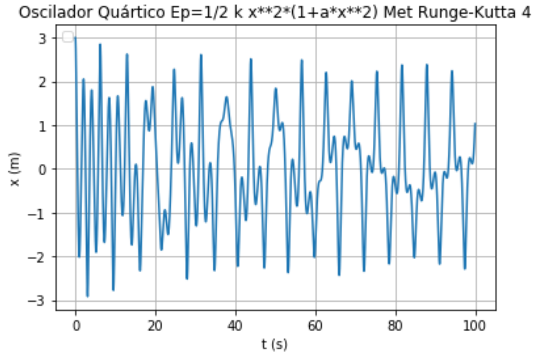
d) 13.791 m; 6.283 s

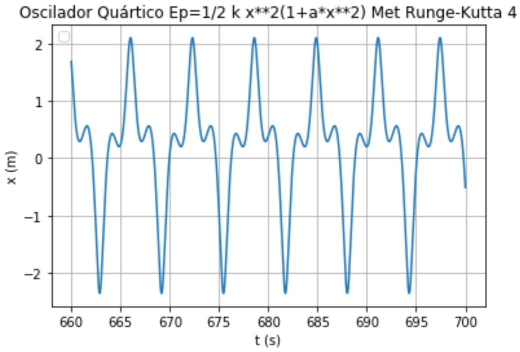
e)



Não é. O sistema recebe energia realizada pela força externa e dissipa energia devido à resistência do meio.

21. a)

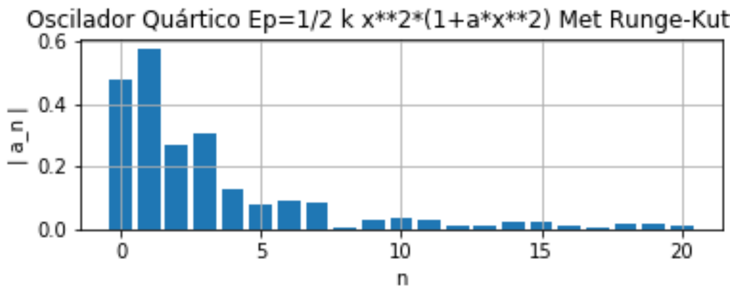


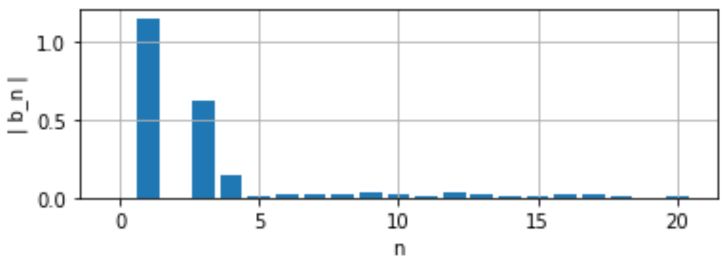


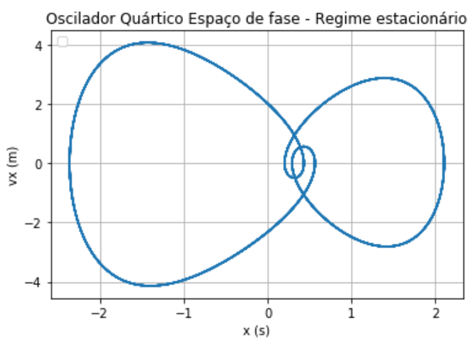
dt=0.01 s produz x(700 s) = -1.1222008 m e

dt=0.001 s produz o mesmo resultado que o passo mais pequeno x(700 s)= -1.1222008 m

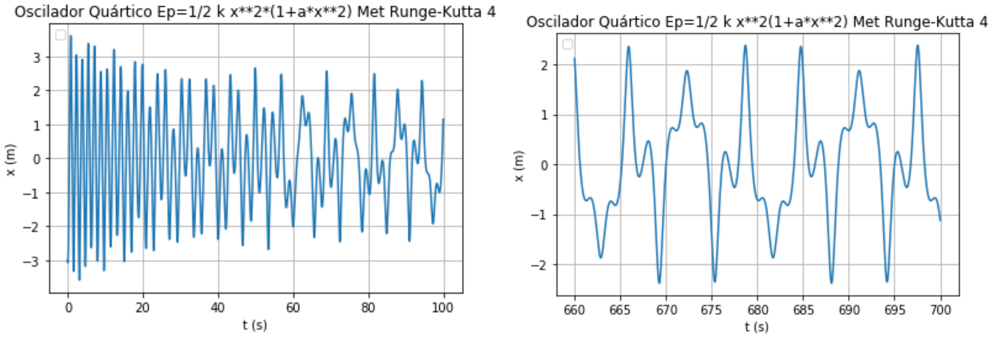
b) Regime estacionário de amplitudes 2.1066 m e -2.3606 m e período 12.57 s.



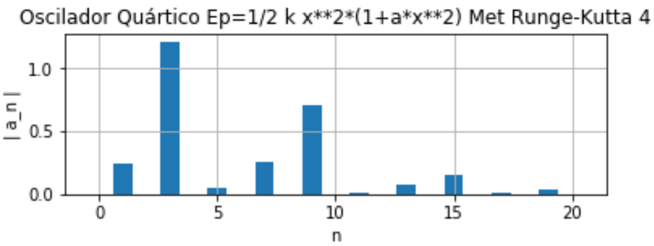


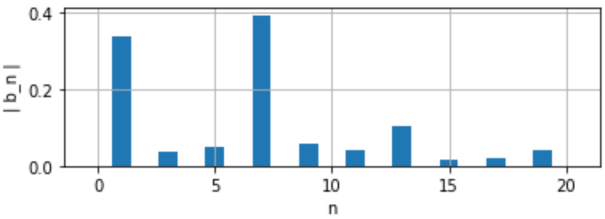


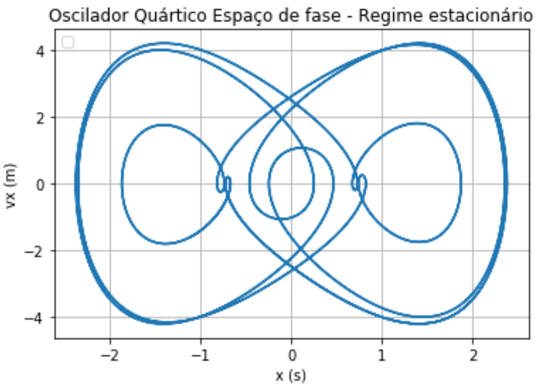
c)



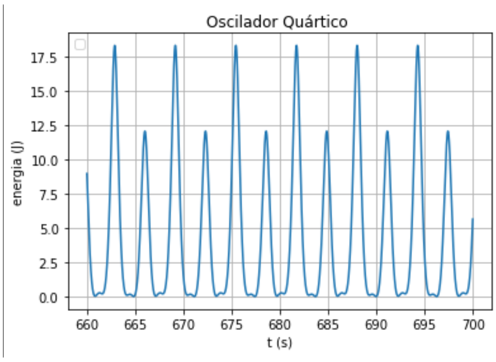
d) Regime estacionário de amplitudes 2.3800 m e -2.3800 m e período 18.85 s.



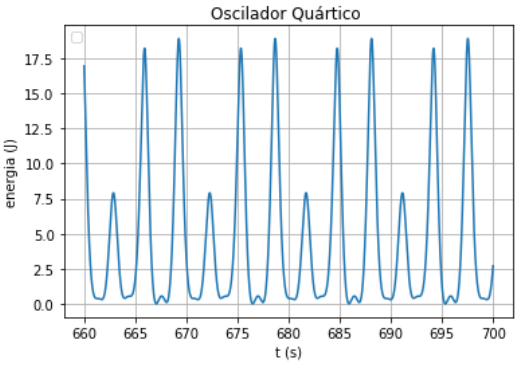




e) (a)



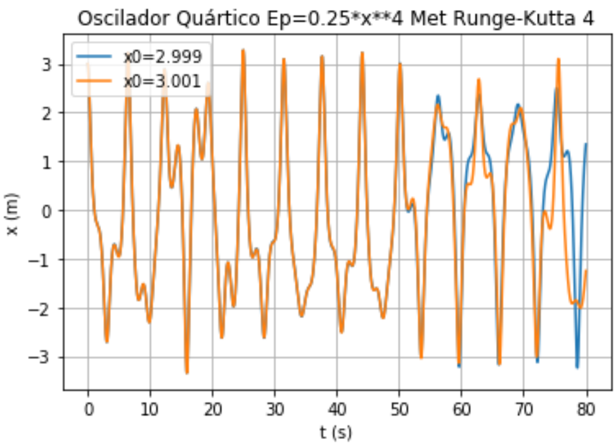
e) (c)



Não é constante.

f) O sistema tem um comportamento transiente, no início, e passado algum tempo, apresenta um comportamento estacionário periódico. A solução do regime estacionário não é sinusoidal. E é dependente das condições iniciais.

22.



até ~73 s.

23.